МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Министерство Образования Оренбургской области

Муниципальное образование Акбулакский район Оренбургской области ОТДЕЛ ОБРАЗОВАНИЯ АДМИНИСТРАЦИИ АКБУЛАКСКОГО РАЙОНА

МБОУ "Акбулакская СОШ №2"

РАССМОТРЕНО	СОГЛАСОВАНО	УТВЕРЖДЕНО
на МО учителей математики, физики и информатики	Зам.директора по ВР	Директор
Гришанова Е.С.	Кандаурова О.А.	Проненко М.В.
Протокол №1 от «29» августа 2024 г.	Протокол №1 от «30» августа 2024 г.	Приказ № 722 от «30» августа 2024 г.

Программа курса

«Решение дополнительных задач по планиметрии»

для обучающихся 11 класса

Срок реализации: 2024-2025 учебный год

Учитель математики: Гришанова Е.С.

Акбулак 2024

1.Пояснительная записка

Целями и задачами курса «Решение дополнительных задач по планиметрии» являются:
- подготовка учащихся к успешной сдаче ЕГЭ;
- развитие логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для будущей профессиональной деятельности;
- овладение математическими знаниями, необходимыми в повседневной жизни, для изучения школьных естественнонаучных дисциплин на базовом уровне, для продолжения образования;
- формирование представлений о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов;

Общую характеристику учебного предмета.

Большинство задач требует применения разнообразных теоретических знаний, доказательства утверждений, справедливых лишь при определенном расположении фигуры, применение различных формул.

Приобрести навыки в решении задач можно, лишь решив достаточно большое их количество, ознакомившись с различными методами, приёмами и подходами.

Программа для общеобразовательных школ по геометрии не акцентирует внимание на методах решения задач, особенно на их частные случаи. Искусство же решать задачи основывается на хорошем знании теоретической части курса, знании достаточного количества геометрических фактов, в овладении определённым арсеналом приёмов и методов решения геометрических задач.

Материал курса способствует развитию у школьников логического мышления, пространственного воображения и позволяет им глубже понять учебный материал по этой теме. В нем увеличивается теоретическая значимость изучаемого материала, расширяются его внутренние логические связи, заметно повышается роль дедукции.

Для эффективной реализации курса необходимо использовать разнообразные формы, методы и приёмы обучения, делая особый упор на развитие самостоятельности, познавательного интереса и творческой активности учащихся. Для этой цели проводятся занятия в виде:

- консультации;
- самостоятельной работы;
- практикума;
- семинара;
- компьютерный практикум.

Цель курса: расширить представления учащихся о методах, приемах, подходах решения геометрических задач по планиметрии и стереометрии

<u>Задачи курса</u>

1. Познакомить учащихся с некоторыми методами решения задач:
а) методом опорного элемента;
б) методом площадей;
в) методом введения вспомогательного параметра;

г) методом восходящего анализа;
д) методом подобия;
е) методом дополнительного построения;
2. Познакомить учащихся с некоторыми теоремами планиметрии и свойствами фигур, не рассматриваемыми в курсе геометрии 7-9 классов.
3. Развивать универсальные учебные действия учащихся, логическое мышление, алгоритмическую культуру, математическое мышление и интуицию, повысить их уровень обученности.
4. Развивать творческие способности школьников, готовить их к продолжению образования и сознательному выбору профессии.

Методические рекомендации по организации элективного курса.

Изучение курса «Решение дополнительных задач по планиметрии» складывается из трёх частей: теоретической, практической, контроля знаний и умений учащихся. Конструирование программного содержания на занятиях по курсу проводится по алгоритму:

- обобщение первоначальных знаний;
- систематизация, конкретизация и углубление теоретических знаний;
- проектирование и организация практической деятельности учащихся по применению базисных знаний.

Теоретическая часть элективного курса заключается в изложении материала учителем по каждой изучаемой теме с приведением примеров и сообщения учащимся дополнительных формул и теорем, не входящих в программу средней школы. Практическая часть элективного курса – в применении учащимися полученных знаний при решении задач. После каждой темы проводится дифференцированная самостоятельная работа, в результате которой оцениваются знания и умения, учащихся по пятибалльной системе оценок. В конце каждого года проводится итоговая контрольная работа.

Описание места учебного предмета в учебном плане.

Программа элективного курса «Решение дополнительных задач по планиметрии» предназначена для изучения в 11 классе и рассчитана на 34 часа.

Предполагаемый результат:

В результате изучения данного элективного курса учащиеся должны уметь:
- точно и грамотно формулировать теоретические положения и излагать собственные рассуждения в ходе решения заданий;
- уверенно решать задачи на вычисление, доказательство и построение;
- применять аппарат алгебры и тригонометрии к решению геометрических задач;
- применять свойства геометрических преобразований к решению задач;
- работать с информацией, в том числе и получаемой посредством Интернет.

Требования к уровню подготовки учащихся.

- овладение знаниями и умениями в области геометрии, необходимыми для изучения естественнонаучных дисциплин, продолжения образования и освоения избранной специальности на современном уровне;
-формирование навыков обобщения и систематизации теоретических знаний для решения задач;
-развитие логического мышления, алгоритмической культуры, математического мышления и интуиции, необходимых для успешной адаптации к реальной жизни и выбора профессии;
- формирование навыков исследовательской деятельности, постановки и решения проблемных вопросов; умение сравнивать, анализировать, рассуждать, выдвигать гипотезы, доказывать, делать выводы, творчески подходить к любому делу;
- формирование навыков самообразования, критического мышления, самоорганизации и самоконтроля, работы в команде.

Система оценки достижений учащихся:

В технологии проведения занятий присутствует элемент самопроверки, взаимопроверки, который предоставляет учащимся возможность самим проверить, как ими усвоен изученный материал. После совместной работы обсуждается результат и намечается пути совершенствования своего сотрудничества. Результаты тестирования легко проверяются с помощью современных технологий. Формой итогового контроля, после изучения некоторых тем, может стать защита проекта, создание презентации, а самое главное- хороший результат при сдаче ЕГЭ.

Возможные критерии оценок

Основными результатами освоения содержания элективного курса учащимися может быть определенный набор общеучебных умений, а также опыт внеурочной деятельности, содержательно связанной с предметным полем – математикой. При этом должна использоваться преимущественно качественная оценка выполнения заданий, а также итоговое тестирование учащихся.

Критерии при выставлении оценок могут быть следующими.

Оценка «отлично». Учащийся освоил теоретический материал курса, получил навыки его применения при решении конкретных задач; в работе над индивидуальными домашними заданиями учащийся продемонстрировал умение работать самостоятельно.

Оценка «хорошо». Учащийся освоил идеи и методы данного курса в такой степени, что может справиться со стандартными заданиями; выполняет домашнее задания прилежно; наблюдаются определенные положительные результаты, свидетельствующие об интеллектуальном росте и о возрастании общих умений учащегося.

Оценка «удовлетворительно». Учащийся освоил наиболее простые идеи и методы решений, что позволяет ему достаточно успешно решать простые задачи.

Учебно-тематический план

№ урока	Содержание учебного материала	Количество часов
1.	Треугольники.	6
2.	Четырехугольники.	5
3.	Окружность. Измерение углов, связанных с окружностью. Окружности, вписанные и описанные. Комбинации окружностей.	8
4.	Вычисление площадей. Метод площадей.	6
5.	Задачи на построение сечений. Вычисление их элементов и площади.	4
6.	Решение задач по всему курсу	5
Итого		**34**

Содержание программы

Раздел I. Планиметрия

Тема 1. Треугольники (6 часов).

Треугольник. Признаки равенства треугольников. Равнобедренный треугольник, его признаки и свойства. Соотношения между сторонами и углами треугольника. Теорема синусов и косинусов. Расширенная теорема синусов. Приемы нахождения медианы в треугольнике. Свойство биссектрисы треугольника.

Прямоугольный треугольник. Тригонометрические функции острого угла прямоугольного треугольника. Свойство медианы, проведенной к гипотенузе прямоугольного треугольника. Формулы для вычисления площадей треугольников.

[Признаки подобия треугольников. Основные конфигурации, связанные с подобием треугольников: примеры отсечения от треугольника подобного исходному. Основная задача подобия]*.

---

* Здесь и далее в квадратных скобках указаны темы, желательные, но не обязательные для рассмотрения на учебных занятиях.

Замечательные точки треугольника. Формулы для вычисления радиусов вписанных и описанных окружностей около треугольников (в том числе, уточненные для частных случаев). [Теоремы Чевы и Менелая].

Тема 2. Четырехугольники (5 часов).

Четырехугольник. Сумма внутренних углов выпуклого четырехугольника. Сумма внешних углов выпуклого четырехугольника.

Параллелограмм и трапеция как классы четырехугольников. Теорема Вариньона. Средние пропорциональные и средние геометрические в трапеции. Основные виды дополнительных построений в трапеции. Ромб, прямоугольник и квадрат как частные виды параллелограмма. Формулы для вычисления площадей основных классов четырехугольников: параллелограммов и трапеций.

Понятие четырехугольника, вписанного или описанного около окружности. Свойства этих конфигураций.

Понятие опорного элемента и минимального базиса в решении геометрической задачи.

Тема 3. Окружность. Измерение углов, связанных с окружностью. Окружности, вписанные и описанные. Комбинации окружностей. (8 часа).

Окружность и круг. Касательная к окружности, хорда. Дуга окружности, круговой сектор, сегмент, пояс.

Измерение углов, связанных с окружностью. Угол центральный и вписанный. Измерение центральных и вписанных углов. Величина угла, образованного касательной и хордой, имеющими общую точку на окружности. Величина угла с вершиной внутри круга, вне круга.

Свойства хорд, секущих и касательных. Свойство радиуса, проведенного в точку касания касательной и окружности. Свойство отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки. Свойства дуг, заключенных между параллельными хордами. Свойства диаметра, перпендикулярного хорде. Связи длины отрезков касательной секущей, проведенных к окружности из одной и той же ее точки. Произведение отрезков пересекающихся хорд. Свойства линий в касающихся и пересекающихся окружностях. Свойство линии центров двух касающихся окружностей. Связь расстояния между центрами двух касающихся окружностей и их радиусов (при касании внешнем и внутреннем). Свойство общей касательной двух окружностей, их общей хорды. Необходимое и достаточное условие касания извне двух окружностей

Окружности, вписанные и описанные около треугольников. Окружности, вписанные и описанные около прямоугольных треугольников. Касательная к окружности. Четырехугольники, вписанные и описанные около окружности. Площади четырехугольников, вписанных и описанных около окружностей. Теорема Птолемея.

Тема 4. Вычисление площадей. Метод площадей. **(6 часа).**

Площадь фигуры. Аксиомы площади. Использование свойства аддитивности площади при разбиении и достраивании многоугольника.

Дополнительные теоремы о площадях треугольников. О разбиении треугольника на равновеликие. Об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу, по равной высоте. Об отношении площадей треугольников с общим основанием и вершинами, лежащими на параллельной ему прямой.

Дополнительные теоремы о площадях четырехугольников. О площади произвольного выпуклого четырехугольника. О площади четырехугольника со взаимно перпендикулярными диагоналями. О площади равнобедренной трапеции по высоте, проведенной из вершины тупого угла.

Теорема Пифагора и формула Герона как ключевой момент в решении задач на нахождение площади фигур. Об отношении площадей подобные фигур. Соотношения между элементами фигур при вычислении площадей вписанных и описанных многоугольников.

Тема 5. Задачи на построение сечения. Вычисление элементов сечения и его площади. (4 часа)

[Методы доказательства в решении стереометрических задач. Задачи на построение. Анализ и доказательства в решении стереометрических задач на построение].

Аксиомы стереометрии и следствия этих аксиом в решении стереометрических задач на построение. Некоторые правила построения сечения. Построение сечения, проходящего через три заданные точки, не лежащие на одной прямой. Построение сечения, проходящего через заданную прямую и не лежащую на ней точку. Приемы вычисления элементов сечения, его периметра и площади.

Р*ешение задач на построение сечений многогранников с условиями параллельности.* Построение сечения, проходящего через заданную прямую параллельно другой заданной прямой. Построение сечения, проходящего через заданную точку, параллельно заданной плоскости. Построение сечения, проходящего через заданную точку параллельно каждой из двух скрещивающихся прямых. Приемы вычисления элементов сечения, его периметра и площади.

[Решение задач на построение сечений многогранников с условиями перпендикулярности. Приемы вычисления элементов сечения, его периметра и площади].

Тема 6. **Решение задач по всему курсу (5 часов).**

Задачи, связанные с применением свойств треугольника. Прямоугольный треугольник. Решение задач на применение теоремы синусов и косинусов. Определение и свойства параллелограмма, прямоугольника, ромба и трапеции. Площади фигур.

Методы обучения: объяснение, выполнение тренировочных упражнений.

Календарно-тематическое планирование по элективному курсу по геометрии в 11 классе

№ урока	Раздел курса	Тема урока	Кол-во часов	Дата	
				По плану	По факту
1	**Треугольники (6 часов)**	Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике	1		
2-3		Свойства медиан, биссектрис, высот. Свойства проекций катетов	2		
4		Метрические соотношения в произвольном треугольнике	1		
5-6		Теоремы о площадях треугольника	2		
7-8	**Четырехугольники (5 часов)**	Метрические соотношения в четырехугольниках. Свойство произвольного четырехугольника, связанное с параллелограммом	2		
9-10		Теоремы о площадях четырехугольников	2		
11		Свойство биссектрисы параллелограмма и трапеции. Свойства трапеции.	1		
12	**Окружности (8 часа)**	Метрические соотношения между длинами хорд, отрезков касательных и секущих. Свойства дуг и хорд	1		
13		Свойства вписанных углов. Углы между хордами, касательными и секущими	1		
14		Комбинации треугольника и окружности	1		
15		Окружности, вписанные и описанные около прямоугольных треугольников	1		
16		Комбинации четырёхугольника и окружностей	1		
17-18		Площади четырехугольников, вписанных и описанных около окружностей.	2		
19		Теорема Птолемея.	1		
20-21	**Вычисление площадей. Метод площадей. (6 часов)**	*Дополнительные теоремы о площадях треугольников.*	2		
22-23		*Дополнительные теоремы о площадях четырехугольников.*	2		
24-25		Отношении площадей подобных фигур	2		
26	**Задачи на построение сечений. Вычисление их элементов и площади (4 часа)**	Некоторые правила построения сечения многогранников. Построение сечения, проходящего через три заданные точки, не лежащие на одной прямой. Построение сечения, проходящего через заданную прямую и не лежащую на ней точку	1		
27		Построение сечения, проходящего через одну из заданных прямых,	1		

		параллельно другой прямой			
28		Построение сечения, проходящего через заданную точку параллельно заданной плоскости	1		
29		Поэтапно-вычислительный метод решения задач на вычисление элементов сечения и его площади	1		
30-31	**Решение планиметрических задач из ЕГЭ (5 часов)**	ЕГЭ № 9 и №10 (планиметрия вычисление длин и площадей)	2		
32-33		ЕГЭ № 12, 13 (планиметрия задачи, связанные с углами)	2		
34		Диагностическая работа	1		
	ИТОГО		**34**		

Программно-методическое обеспечение

Список используемой литературы

1. Денищева Л.О. и др. **ЕГЭ. Контрольные измерительные материалы. «Просвещение». Москва 2003.**
2. Лысенко Ф.Ф.Математика ЕГЭ. Вступительные экзамены. Легион. Ростов-на-Дону 2008-2014.
3. Сканави М.И. Сборник задач по математике. Москва «ОНИКС 21 век» «Мир и образование» «Альянс – В» 2003.
4. Геометрия. 10-11 классы: тесты для текущего и обобщающего контроля/авт.сост.Г.И.Ковалёва, Н.И.Мазурова.- Волгоград: Учитель, 2009, 187 стр.

Литература для учащегося

1. Геометрия, 10-11: Учеб. для общеобразовательных учреждений/ Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др.-Москва: Просвещение, 2009 год
2. Виртуальная школа Кирилла и Мефодия. Репетитор по математике. Москва. 2007 год
3. Учебное электронное издание. Математика 5- 11 класссы. Практикум. Под редакцией Дубровского В.Н., 2004.
4. Единый государственный экзамен: математика: контрольные измерительные материалы: 2008-2014.- М.Просвещение, издательства «Просвещение»

Дополнительная литература:

1. Литвиненко В. Н.
Сборник задач по стереометрии с методами решений: Пособие для учащихся. - М.: Просвещение, 1998.-255 с.: ил.
2. Звавич Л. И.
Геометрия. 8- 11 кл.: Пособие для школ и классов с углубленным изучением математики. – М.: Дрофа, 2000. – 288 с.6 ил.
3. Звавич Л. И.
Контрольные и проверочные работы по геометрии. 10 – 11 кл.: Метод. пособие / Л. И. Звавич, А. Р. Рязановский, Е. В. Такуш. – М.: Дрофа, 2001. – 192 с.: ил.
4. Примерное тематическое планирование уроков повторения в 10 и 11 классах // Первое сентября. Математика. – 1999. - №16.- с. 6 – 8
5. Углубленное изучение математики 8 – 11 классы // Первое сентября. Математика. - 1996. – № 41.- с. 2 – 3
6. Углубленное изучение математики 8 – 11 классы // Первое сентября. Математика. - 1996. – № 44.- с. 2 – 3
7. Матизен В. Э.
Равногранные и каркасные тетраэдры // Квант. – 1983. _ №7. – с.34 – 39
8. Сборник задач по геометрии для проведения устного экзамена в 9 и 11 кл. Пособие для учителя / Д. И. Аверянов, Л. И. Звавич, Б. П. Пигарев, А. Р. Рязановский. – М. Просвещение: Уч. лит., 1996. – 96 с.- ил.
9. Бовт Н.
Повторяем – решая. Треугольники // Первое сентября. Математика. - 1995. – № 16.
10. Бовт Н.
Повторяем – решая. Четырехугольники // Первое сентября. Математика. - 1995. – № 17.
11. Бовт Н.
Повторяем – решая. Окружность // Первое сентября. Математика. - 1995. – № 18.
12. Гусев В. А., Литвиненко В. Н., Мордкович А. Г.
Практикум по элементарной математике. Планиметрия. – М.: Вербум – М, 2000,

- 112 с.
13. Сборник задач по математике для поступающих во втузы: Учеб. Пособие / В. К. Егерев, др.; п.ред. М. И. Сканави.- М.: «Столетие», 1997. – 560 с.: ил.
14. Полонский В. Б., Рабинович Е. М., Якир М. С. Геометрия: Задачник к школьному курсу. – М.: Аст-Пресс: Магистр – S, 1998. – 256 с.
15. Шарыгин, Р. К. Гордин. – М.: ООО «Издательство Астрель»: ООО «Издательство АСТ», 2001. – 400 с.: ил.
16. Зубелевич Г. Задачи на вычисление площадей треугольников и четырехугольников // Первое сентября. Математика. - 1995. – № 4, 10, 11, 14.
17. Материалы ЕГЭ по математике за последние годы. КИМ «ЕГЭ. Математика», 2010-2016 гг.

Используемые сайты

1. http://fipi.ru/view/sections/211/docs/471.html - демо-версия
2. http://alexlarin.net - различные материалы для подготовки
3. http://www.egetrener.ru - видеоуроки
4. http://www.mathege.ru - открытый банк заданий
5. http://live.mephist.ru/?mid=1255348015#comments - Открытый банк
6. http://reshuege.ru/
7. http://matematika.egepedia.ru
8. http://www.mathedu.ru
9. http://www.ege-trener.ru
10. http://egeent.narod.ru/matematika/online/
11. http://alexlarin.net/ege/2010/C4agk.pdf - Подготовка к С4
12. http://vkontakte.ru/app1841458 - приложение ВКонтакте - отработка части В
13. http://matematika-ege.ru
14. http://uztest.ru/
15. http://www.diary.ru/~eek - Математическое сообщество

Дидактические материалы

Раздел I. Планиметрия

§1. ТРЕУГОЛЬНИКИ

Дидактические цели и задачи: обобщить и систематизировать знания о треугольнике, его частных видах, их свойствах. Формировать навык в применении теорем, связывающих элементы в треугольнике. Основная цель темы – формирование умений «видеть» прием или метод решения, научит школьника формулировать идею решения и составлять ход рассуждений.

*Задачи для устных упражнений**

1. Могут ли стороны треугольника относиться как 2:3:6?

Ответ. Нет.

2. В треугольнике ABC: AB = BC, $\angle A = 70°$.

Найдите внешний угол треугольника (рассмотрите все случаи).

3. В треугольнике ABC: медианы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке M, причем, AM =4 см, MA_1 = 2 см, B_1M = 1 см.

Вычислите MB.

4. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся стороны BC в точке K.

Вычислите CK, если AC +CB = 16, AB = 4. Указания. Расстояние от вершины треугольника до точки касания с вписанной окружностью можно выразить через стороны треугольника.

Ответ. 6.

5. В треугольнике ABC AC = 4, AB = 6. Прямая, проходящая через вершину треугольника A и центр вписанной окружности пересекает сторону BC в точке L, причем, LB = 3.

Вычислите отрезок CL. Указания. Теорема о биссектрисе угла треугольника; точка пересечения биссектрис является центром вписанного круга.

Ответ. 2.

6. В треугольнике ABC : $\angle B = 30°$, AL – биссектриса угла A, $L \in BC$ и $LK \perp AC$, $K \in AC$.

Вычислите длину отрезка LK, если BL = 10. Указания. Свойство биссектрисы угла треугольника.

Ответ. 5.

7. В треугольнике ABC: AB =10, $\angle C = 30°$. KF и KL – серединные перпендикуляры к сторонам BC и AC.

Вычислите AK. Указания. Центр описанного около треугольника круга; теорема синусов.

Ответ. 10.

8. В треугольнике AB: AC = 2, BC = 3, $\angle C = 60°$.

Вычислите AB. Указание. Теорема косинусов.

Ответ. $\sqrt{7}$.

9. В треугольнике ABC: $\angle C = 90°$, $h_c = 3$, $m_c = 5$.

Вычислите площадь треугольника ABC. Указания. Свойство прямоугольного треугольника: $R = c/2 = m_c$.

Ответ. 15.

---

* В решениях задач можно использовать готовый чертеж

10. В треугольнике АВС: $\angle C = 90°$, высота, проведенная к гипотенузе, делит ее на части, равные 4 см и 9 см.

Вычислите значение высоты. Указания. Высота, проведенная из вершины прямого угла, делит треугольник на два подобных.

Ответ. 6.

11. В треугольнике ADC точка В делит сторону АС на два отрезка: 3 см и 1 см.

Вычислите площадь треугольника DBC, если площадь треугольника ADB = 15 см. Указания. Формула площади треугольника, отношение площадей треугольников, имеющих по равной высоте.

Ответ. 5.

12. Верно ли, что в любом треугольнике $4rRp = abc$? Указания. Формулы площади треугольника.

Ответ. Да.

Уровень Б

1. Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$ см, а медиана боковой стороны равна 5 см.

Найдите длину боковой стороны. Указания. Метод «удвоения медианы».

Ответ. 6 см.

2. Найти периметр прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна c, а радиус вписанной окружности равен r. Указания. Свойство отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки.

Ответ. $2c + 2r$.

3. В треугольнике даны длины двух сторон b и c и угол α между ними.

Найдите длину биссектрисы, проведенной к третьей стороне. Указания. Метод площадей.

Ответ. $2\,bc\cos(\alpha/2)/\,b+c$.

4. К окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основание 12 см и высотой 8 см, проведена касательная, параллельная основанию.

Найдите длину отрезка этой касательной, заключенного между сторонами треугольника. Указания. Подобие треугольников.

Ответ. 3 см.

5. В треугольнике АВС АВ = 13, ВС = 7, ВМ = 4, где М – середина стороны АС.

Найдите площадь треугольника АВС. Указания. Теорема об отношении площадей треугольников, имеющих равные высоты.

Ответ. $14\sqrt{3}$.

6. Точки касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, делит гипотенузу на отрезки длиной m и n.

Найдите площадь треугольника.

Ответ. nm.

Уровень В

1. Определите вид треугольника, если его медианы 3, 4, 5.

Указание. Подобие треугольников, отношение отрезков медиан.

Ответ. остроугольный.

2. В треугольнике АВС АВ = СН, где Н – ортоцентр треугольника АВС.

Найдите угол С. Указания. Подобие треугольников.

Ответ. 45°.

3. В треугольнике ABC BC = a, $\angle A = \alpha$, I- центр вписанного круга.

Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BCI.

Указания. Теорема синусов, формулы тригонометрии.

Ответ. $a/2\cos(\alpha/2)$.

4. В прямоугольном треугольнике расстояние от центра вписанного круга до вершин острых углов равны $\sqrt{10}$ и $\sqrt{5}$.

Найдите стороны треугольника. Указания. Теорема косинусов, свойство центральных и вписанных углов, радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности.

Ответ. 3, 4, 5.

5. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90°$. Биссектриса угла A делит противолежащую сторону на отрезки длиной 4 см и 5 см.

Найдите площадь треугольника. Указания. Свойство биссектрисы угла треугольника.

Ответ. 54 см^2.

Прямоугольный треугольник

1. Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, делит прямой угол в отношении 1:2 и равна m.

Найдите стороны треугольника.

Ответ. m, $m\sqrt{3}$, $2m$.

2. Точка, взятая на гипотенузе прямоугольного треугольника и одинаково удаленная от его катетов, делит гипотенузу на отрезки 30 см и 40 см.

Найдите катеты.

Ответ. 56 и 42 см.

3. Найдите биссектрисы острых углов прямоугольного треугольника, катеты которого равны 18 см и 24 см.

Ответ. $9\sqrt{5}$ и $8\sqrt{10}$ см.

4. Периметр прямоугольного треугольника равен 60 см, а высота, проведенная к гипотенузе, равна 12 см.

Найдите стороны треугольника.

Ответ. 15, 20, 25 см.

Равнобедренный треугольник

5. Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$ см, а медиана, проведенная к его боковой стороне, равна 5 см.

Найдите боковую сторону.

Ответ. 6 см.

6. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 4 см, а медиана, проведенная к его боковой стороне, равна 3 см.

Найдите основание треугольника.

Ответ. $\sqrt{10}$ см.

Произвольный треугольник

7. (ЕГЭ, 2004 г.*)Две стороны треугольника равны a и b, а медианы, проведенные к этим сторонам, взаимно перпендикулярны.

Найдите третью сторону треугольника.

Ответ. $((a^2+b^2)/5)^{0,5}$

---

*Задача представлена в общем виде

§2. ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

Дидактические цели и задачи. Обобщить и систематизировать знания о четырехугольниках, их видах (параллелограммах и трапециях) и свойствах. Формировать навык в применении теорем, связывающих элементы в четырехугольнике.
Основная цель темы – формирование навыка использования алгебраического метода решения геометрических задач, умения выделять опорный элемент и устанавливать взаимосвязь с другими элементами заданной конфигурации, формирование устойчивого навыка использования поэтапно-вычислительного метода. Реализация внутри предметных связей: треугольник-четырехугольник.

Задачи устных упражнений.

1. В произвольном четырехугольнике ABCD диагонали AC и BD пересекаются под углом 30° и равны соответственно 2 и 1.

Вычислите площадь этого четырехугольника. Указания. Вычисление площади произвольного четырехугольника через его диагонали и угол между ними.

Ответ. 0, 5.

2. Может ли средняя линия трапеции пройти через точку пересечения диагоналей? Указания. Диагонали трапеции разбивают ее на треугольники, два из которых, прилежащие к основания, подобны.

Ответ. Нет.

3. В четырехугольнике ABCD $AB \parallel CD$, AB = 2, CD = 3, AD = BC, DB – биссектриса.

Найдите периметр этого четырехугольника. Указания. Признак трапеции и свойство ее углов.

Ответ. 9.

4. Окружность касается оснований трапеции ABCD и ее боковой стороны AB, причем, ее она делит точкой касания К на два отрезка ВК =1 и АК = 4.

Найдите диаметр окружности. Указания. Свойство биссектрис, проведенных из вершин боковой стороны трапеции.

Ответ. 4.

5. AECF, ABCD и AMCN – прямоугольники.

Почему равны MN, EF, BD? Указания. Свойство диагоналей прямоугольника.

6. ABCD – параллелограмм, AB = 3, AD = 8, BDD = 7.

Вычислите AC. Указания. Равенство, связывающее длины сторон и диагоналей параллелограмма.

Ответ. $\sqrt{24}$.

7. ABCD – ромб. K, L, M, P – середины его сторон.

Определите вид четырехугольника. Указания. Свойство диагоналей ромба.

Ответ. Прямоугольник.

8. Окружность вписана в четырехугольник ABCD. AB = 2, BC = 3, CD = 4.

Вычислите AD. Указания. Свойство описанного четырехугольника.

Ответ. 3.

9. Трапеция ABCD вписана в круг. AB = 3, BC = 2, AD = 4.

Доказать, что существует вписанная в нее окружность. Указания. Свойство вписанного четырехугольника.

Уровень Б

1. В каком отношении делит площадь трапеции средняя линия, если основания трапеции равны a и b?

Ответ $(3a+b)/(a+3b)$.

2. Стороны параллелограмма равны 23 и 11, а диагонали относятся как 2:3.

Найдите диагонали.

Ответ. 20 и 30.

3. Основания трапеции равны 4 и 16 см.

Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей, если известно, что окружности существуют.

Ответ. 4 см и $5\sqrt{41}/4$ см.

4. Центр круга, вписанного в прямоугольную трапецию, отстоит от концов боковой стороны на 2 и 4 см. Найдите площадь трапеции. Ответ. 14, 4 см^2.

Уровень В

1. В каком отношении прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции и параллельная основаниям делит площадь трапеции с основаниями a и b?

Ответ. $a(a^2 + 3ab)/b(b^2 + 3ab)$.

2. Найдите площадь трапеции, если длины ее диагоналей 13 и 15 м, а высота трапеции 12 м.

Ответ. 84 м^2.

3. В трапеции ABCD (CB || AD). AB = CD, $\angle$ BCA = $\angle$DCA, BC= 3, периметр трапеции равен 42.

Найдите площадь трапеции.

Ответ. 96.

4. Доказать свойство вписанного в окружность четырехугольника, диагонали которого перпендикулярны: площадь четырехугольника равна полусуммы произведений противоположных сторон.

5. Доказать, что если боковые стороны трапеции перпендикулярны, то сумма квадратов диагоналей такой трапеции равна сумме квадратов ее оснований.

6. В трапеции ABCD каждое из оснований AD и BC продолжено в обе стороны. Биссектрисы внешних углов A и B трапеции пересекаются в точке K, а внешних углов C и D в точке E. KE = 2a. Найдите периметр трапеции. Ответ 4a.

7. Найдите площадь ромба ABCD, если радиусы окружностей, описанных около Δ ABC и ΔABD равны R и r.

Ответ. $8r^3R^3/(r^2+R^2)^2$.

Дополнительные задачи

Параллелограмм и его виды

1. Стороны параллелограмма 8 и 3; биссектрисы двух смежных углов параллелограмма, прилежащих к большей стороне, делят противолежащую сторону на три части.

Найдите каждую из них.

Ответ. 3, 2, 3.

2. Параллелограмм с периметром 44 разделен диагоналями на 4 треугольника. Разность между периметрами двух смежных треугольников равна 6.

Найдите длины сторон параллелограмма.

Ответ. 14 и 8.

3. Перпендикуляр, опущенный из вершины параллелограмма на его диагональ, делит ее на отрезки 6 см и 15 см.

Найдите стороны и диагонали параллелограмма, если известно, что разность сторон равна 7 см.

Ответ. 17, 10, 21, $\sqrt{337}$ см.

4. Диагонали прямоугольника равны 8 и пересекаются под углом 60°.

Найдите меньшую сторону прямоугольника.

Ответ. 4.

5. Перпендикуляр, опущенный из вершины прямоугольника на его диагональ, делит ее в отношении 1:3.

Найдите длину диагонали, если известно, что точка ее пересечения с другой диагональю удалена от большей стороны на расстояние, равное 2.

Ответ.8.

6. Найдите стороны и углы четырехугольника с вершинами в серединах сторон ромба, диагонали которого равны 6 и 10 .

Ответ.3, 5, 3, 5, 90 °, 90 °, 90 °, 90 °.

7. Острый угол A ромба ABCD равен 45 °, проекция стороны AB на строну AD равна 12.

Найдите расстояние от центра ромба до стороны CD.

Ответ. 6.

8. Найдите расстояние от центра ромба до его стороны, если острый угол ромба равен 30 °, а сторона равна 4. Ответ.1.

Трапеция

9. В равнобедренной трапеции острый угол равен 60 °.

Докажите, что меньшее основание равно разности большего основания и боковой стороны.

10. В равнобедренной трапеции высота равна 10, а диагонали взаимно перпендикулярны.

Найдите среднюю линию трапеции.

Ответ. 10.

11. Высот равнобедренной трапеции, опущенная из вершины меньшего основания , делит большее основание в отношении 1:3.

Найдите отношение оснований трапеции.

Ответ.1:2.

12. Меньшее основание равнобедренной трапеции равно боковой стороне, а диагональ перпендикулярна боковой стороне.

Найдите углы трапеции.

Ответ. 60 °, 60 °, 120 °, 120 °.

13. Один из углов трапеции равен 30 °, а прямые, содержащие боковые стороны трапеции, пересекаются под прямым углом.

Найдите меньшую боковую сторону трапеции, если ее средняя линия равна 10, а одно из оснований равно 8.

Ответ.2.

14. Диагональ равнобедренной трапеции равна 10 и образует угол, равный 60 ° с основанием трапеции.

Найдите среднюю линию трапеции.

Ответ. 5.

15. Меньшая боковая сторона прямоугольной трапеции равна 3, а большая образует угол, равный 30 °, с одним из оснований.

Найдите это основание, если на нем лежит точка пересечения биссектрис при другом основании.

Ответ. 9.

§ 3. ОКРУЖНОСТЬ. ИЗМЕРЕНИЕ УГЛОВ, СВЯЗАННЫХ С ОКРУЖНОСТЬЮ. ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ЛИНИИ В КРУГЕ. КОМБИНАЦИИ ОКРУЖНОСТЕЙ

Дидактические цели задачи. Активизировать знания и умения учащихся решать задачи на применение соотношений между отрезками, углами в окружности. Установление внутри предметных связей. Развитие наблюдательности.

Задачи устных упражнений

1. Точки А, В, С делят окружность на три дуги, причем, ∪АВ: ∪ВС : ∪АС + 1 : 6 : 2. Найдите углы треугольника АВС. Указание. Измерение вписанных углов.

Ответ. 20°, 120°, 40°.

2. Вершины квадрата ABCD и произвольная точка О лежат на окружности.

Доказать, что ∠ВОА = ∠AOD = ∠DOC. Указание. Равные хорды стягивают равные дуги.

3. Точки C, D, К лежат на окружности. Через точку К проведена касательная АВ.

Найдите ∠DKB, если ∠ К = 50°. Указание. Измерение угла между хордой и касательной.

Ответ. 50°.

4. Точки А, В, С, D лежат на окружности. АС – биссектриса угла А.

Найдите подобные треугольники, если АС пересекает BD в точке О. Указание. Свойство вписанных углов, опирающихся на одну дугу.

Ответ. ΔОВС, ΔАВС.

5. Первая окружность вписана в угол АОС и касается его сторон в точках А и С. Вторая окружность вписана в угол BOD и касается его сторон в точках В и D(точка D лежит на луче ОС).

Найдите CD, если OA = a, OB = b. Указание. Свойство касательных, проведенных из одной точки к окружности.

Ответ. $a – b$.

6. Две различные хорды окружности, пересекаясь, образуют отрезки длиной 6 и 3, x и 2. Вычислите x. Указание. Свойство пересекающихся хорд.

Ответ. 9.

7. Из точки А к окружности проведены касательная АК и секущая АС, причем, АС = 16, АК = 8.

Найдите АВ, В – точка пересечения АС с окружностью. Указания. Свойство пересекающихся хорд.

Ответ. 4.

8. Треугольник АВС вписан в окружность с центром в точке О, ОК⊥ВС, KD||АВ. Доказать, что OD⊥АС. Указания. Свойство диаметра, перпендикулярного хорде.

9. Окружности радиусов 3 и 5 касаются.

Найдите расстояние между их центрами. Указание. Точка касания окружностей лежит на линии их центров; $O_1O_2 = R_2 \pm R_1$.

Ответ. 2 и 8.

Уровень Б

1. К окружности радиуса r из одной точки проведены секущая, проходящая через центр окружности, и касательная, равная половине секущей.

Найдите отрезок касательной. $\frac{4}{3}$R.

2. Окружности 3 и 5 касаются друг друга в точке А. Прямая, проходящая через А, пересекает окружность большего радиуса в точке В, а меньшего – в точке С.

Найдите длину АВ, если ВС= $2\sqrt{5}$.

Ответ. $5\sqrt{5}$, $5\sqrt{5}/4$.

3. Радиус окружности равен 7 см. Из точки, удаленной от центра на 9 см, проведена секущая так, что она делит окружность пополам.

Определите длину секущей.

Ответ. 8 см.

4. Две хорды, длины которых 6 см и 8 см, пересекаются.

Найдите отрезки первой хорды, если вторая делится на отрезки 2 и 4 см.

Ответ. $(4 + 2\sqrt{2})$ см и $(4 - 2\sqrt{2})$ см.
5. К окружности радиуса r проведены четыре касательные, образующие ромб, большая диагональ которого равна 4r.

Определите площадь фигуры, ограниченной двумя касательными, проведенными из одной точки, и меньшей дугой окружности, заключенной между точками касания.

Ответ. $R^2 (2\sqrt{3} - \pi)/6$.

Уровень В

1. Найдите радиус окружности, вписанной в криволинейный треугольник, образованный полуокружностью диаметра AB и двумя полуокружностями, построенных на радиусах OA и OB, как на диаметрах, если AB = 4R.

Ответ $\frac{2}{3}$R.

2. Через точки P и Q пересечения двух окружностей проведены их общие секущие AA_1 и BB_1.

Докажите, что AB и A_1B_1 параллельны.

3. Окружности радиусов R и r касаются внешним образом. Пусть A и B – точки касания их общей касательной соответственно с первой и второй окружностями, A_1 – точка, диаметрально противоположная точке A. Отрезок A_1B пересекает окружность в точке M.

Найдите A_1M :MB.

Ответ. R : r.

4. Две окружности радиусов R и r касаются внешним образом.

Найдите площадь круга, вписанного в криволинейный треугольник, образованный этими окружностями и их внешней касательной.

Ответ. $\pi R^2 r^2 / (r^{0,5} + R^{0,5})^4$.

5. Две окружности касаются одновременно обеих сторон прямого угла.

Найдите отношение их радиусов, если одна из окружностей проходит через центр другой.

Ответ. $(2- \sqrt{2})/2$, $(2- \sqrt{2})$.

6. Окружность проходит через вершины B, C, D трапеции ABCD и касается стороны AB в точке B.

Найдите длину диагонали BD, если длины оснований равны a и b.

Ответ $(ab)^{0,5}$.

§ 4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ. МЕТОД ПЛОЩАДЕЙ

Дидактические цели и задачи. Развитие умений решать задачи алгебраическим методом, выбирать при решении задачи в качестве опорного элемента площадь (собственно реализовывать метод площадей при решении задач). Отработка навыка в использовании поэтапно-вычислительного метода в решении планиметрических задач.

Уровень Б

1. В треугольнике основание на 4 меньше высоты, а площадь этого треугольника равна 96.

Найдите основание и высоту треугольника.

Ответ. 12; 16.

2. Катеты прямоугольного треугольника относятся, как 5:6, а гипотенуза равна 122.

Найдите отрезки гипотенузы, отсекаемые высотой.

Ответ. 50, 72.

3. Около трапеции ABCD описана окружность радиуса 6. Центр этой окружности лежит на основании AD. Основание BC равно 4.

Найдите площадь трапеции.

Ответ. $32\sqrt{2}$.

4. В треугольнике ABC даны три стороны: AB = 26, BC = 30 и AC = 28.

Найдите часть площадь этого треугольника, заключенную между высотой и биссектрисой, проведенной из вершины B.

Ответ. 36.

5. Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором AB = BC, $\angle$ ABC = 120°. Расстояние от середины стороны AB до основания AC равно a.

Найдите площадь круга, вписанного в треугольник ABC.

Ответ. $12\pi a^2(7-4\sqrt{3})$.

6. Площадь равнобедренной трапеции равна 32. Котангенс угла между диагональю и основанием равен 2.

Найдите высоту трапеции.

Ответ. 4.

7. Диагональ равнобедренной трапеции делит тупой угол пополам. Меньшее основание трапеции равно 3, периметр равен 42.

Найдите площадь трапеции.

Ответ. 96.

8. Найдите площадь треугольника, если две его стороны равны 1 и $\sqrt{13}$, а медиана, проведенная к третьей стороне, равна 2.

Ответ. $\sqrt{3}$.

Уровень B

2. Сумма двух противоположных сторон описанного четырехугольника равна 10, а его площадь 12.

Найдите радиус окружности, вписанной в этот четырехугольник.

Ответ. 1,2.

3. Сумма двух противолежащих сторон описанного четырехугольника равна 12, а радиус вписанной окружности равен 5.

Найдите площадь четырехугольника.

Ответ. 60.

4. Боковая сторона треугольника разделена в отношении 2:3:4, считая от вершины, и из точек деления проведены прямые, параллельные основанию.

В каком отношении разделилась площадь треугольника?

Ответ. 4:21:56.

5. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины B прямого угла опущена высота BK на гипотенузу AC. Известно, что AK=5, AB = 13.

Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ. 202, 8.

6. Средняя линия трапеции равна 10 и делит площадь трапеции в отношении 3:5.

Найдите основания трапеции.

Ответ. 15, 5.

7. В равнобедренную трапецию площадью 32 вписана окружность радиуса 2.

Найдите боковую сторону трапеции.

Ответ.7.

8. Найдите площадь равнобедренного треугольника, если высота, опущенная на основание, равно 10, а высота, опущенная на боковую сторону, равна 12.

Ответ. 75.

9. Найдите площадь треугольника, если две стороны его соответственно равны 27 и 29, а медиана третьей стороны 26.

Ответ. 270.

10. Найдите площадь треугольника ABC, если AC=3, BC=4, а медианы AK и BL взаимно перпендикулярны.

Ответ. $\sqrt{11}$.

11. На стороне AD ромба ABCD взята точка M, причем MD = 0,3AD и BM = MC = 11.

Найдите площадь треугольника BCM.

Ответ. $20\sqrt{6}$.

12. Окружность, вписанная в треугольник, точкой касания делит одну из сторон на отрезки длиной 3 и 4, а противолежащий этой стороне угол равен 120°.

Найдите площадь треугольника.

Ответ. $4\sqrt{3}$.

13. Вершины треугольника соединены с центром вписанного круга. Проведенными отрезками площадь этого треугольника разделилась на три части: 28, 60, 80.

Найдите стороны треугольника.

Ответ. 14, 30, 40.

§ 5. ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ В ЗАДАЧАХ НА КОМБИНАЦИИ ОКРУЖНОСТИ И ТРЕУГОЛЬНИКА*

Дидактические цели и задачи. Формирование навыка использования подобия треугольников для нахождения элементов в комбинациях окружности и треугольника.

1. В равнобедренном треугольнике высота равна 20, а основание относится к боковой стороне, как 4:3.

Найдите радиус вписанного круга.

Ответ. 8.

2. В равнобедренном треугольнике центр вписанного круга делит высоту в отношении 12:5, а боковая сторона равна 60.

Найдите основание треугольника.

Ответ. 50.

3. В равнобедренном треугольнике радиус вписанного круга составляет $\frac{2}{7}$ высоты, а периметр этого треугольника равен 56.

Найдите стороны треугольника.

Ответ. 16, 20, 20.

4. В равнобедренный треугольник, у которого боковая сторона равна 100, а основание 60, вписан круг.

Найдите расстояние между точками касания, находящимися на боковых сторонах.

Ответ. 12.

5. В треугольнике ABC известно, что AB = 15, BC= 12, AC = 18.

В каком отношении центр вписанной окружности треугольника делит биссектрису угла C?

Ответ. 2:1.

6. Точка на гипотенузе, равноудаленная от катетов, делит гипотенузу на отрезки длиной 30 и 40.

Найдите катеты треугольника.

Ответ. 42, 56.

7. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 20, а диаметр описанной окружности равен 25.

Найдите радиус вписанной окружности.

Ответ. 6.

* В данных задачах предлагается использовать подобие для нахождения элементов планиметрических конфигураций

§ 6. ПРИМЕНЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИИ В РЕШЕНИИ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

1. Сумма двух неравных высот равнобедренного треугольника равна l, угол при вершине равен α.

Найдите боковую сторону.

2. Угол при основании равнобедренного треугольника равен α.

Найдите отношение радиусов вписанной и описанной окружностей.

3. Высота равнобедренной трапеции равна h, а угол между ее диагоналями, противолежащий боковой стороне, равен α.

Найдите среднюю линию трапеции.

4. В прямоугольном треугольнике даны его площадь S и острый угол α.

Найдите расстояние от точки пересечения медиан треугольника до гипотенузы.

5. Основание равнобедренного треугольника равно a, угол при вершине равен α.

Найдите длину биссектрисы, проведенной к боковой стороне.

6. Около круга радиуса R описана равнобедренная трапеция с острым углом α при основании.

Найдите периметр трапеции.

7. Площадь прямоугольной трапеции равна S, острый угол равен α.

Найдите высоту трапеции, если ее меньшая диагональ равна большему основанию.

Раздел II. Стереометрия

§1. ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ СЕЧЕНИЯ, ВЫЧИСЛЕНИЕ ЕГО ЭЛЕМЕНТОВ И ПЛОЩАДИ

Дидактические цели и задачи: сформировать умение строить сечения, определять его вид, вычислять элементы и площадь.

ТЕМА 1. Некоторые правила построения сечения многогранника. Построение сечения, проходящего через три заданные точки, не лежащие на одной прямой

Уровень А

1. Через вершину A_1 и середины боковых ребер BB_1 CC_1 прямой треугольной призмы ACB $A_1B_1C_1$ проведено сечение.

Вычислите его периметр, если AA_1 =6см, AB=AC=4 см, BC=3см.

2. Через вершину A_1 и середины ребер AB и AC правильной треугольной призмы ACB $A_1B_1C_1$ проведено сечение.

Вычислите его периметр, если BC=16 см, AA_1 =6см.

3. Через вершину и середины двух противолежащих сторон правильной четырехугольной пирамиды проведено сечение.

Вычислите его площадь, если сторона основания равна 12 см, а высота равна 5 см.

4. Через вершину и середины двух соседних сторон основания правильной четырехугольной пирамиды проведено сечение.

Вычислите его периметр, если сторона основания пирамиды равна 8 см, а боковое ребро – 5 см.

5. Основанием пирамиды MABC является прямоугольный треугольник. Угол A равен 60°, угол C равен 90°, AB = 8 дм. Высота пирамиды MA равна 6 дм.

Вычислите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки B, C и середину высоты пирамиды.

Уровень Б

1. Проведите сечение куба ABCD $A_1B_1C_1D_1$, содержащее точки A, C и середину ребра A_1D_1 .

Какой фигурой является сечение? Найдите его периметр, если ребро куба равно *a*.

2. Проведите сечение правильной треугольной призмы ABC $A_1B_1C_1$ плоскостью, содержащей середины ребер AA_1, BB_1 и BC.

Найдите периметр сечения, если все ребра призмы равны *a*.

3. Основание пирамиды MABCD – прямоугольный треугольник, стороны которого 9 см и 12 см. Боковое ребро MD перпендикулярно плоскости основания. Постройте сечение пирамиды плоскостью, содержащей точки A, C и середину высоты MD.

Вычислите площадь сечения, если угол между плоскостями сечения и основания равен 30°.

Уровень В

1. Проведите сечение правильной треугольной призмы ABC $A_1B_1C_1$ плоскостью, содержащей вершину A_1 середины ребер CC_1, BC.

Вычислите периметр сечения призмы, если высота ее равна 6 см, а сторона основания – 8 см.

2. Проведите сечение правильной четырехугольной призмы ABCD $A_1B_1C_1D_1$ плоскостью, содержащей вершину D_1 и середины ребер AB и BC.

Вычислите его периметр и площадь, если высота призмы равна 14 см, а сторона основания – 16 см.

3. Проведите сечение куба ABCD $A_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через середины ребер C_1D_1, CC_1 и AB.

Какой фигурой является сечение? Найдите его периметр, если ребро куба равно *a*.

Задачи повышенной сложности

1. В пирамиде SABCD с вершиной S диагональ BD делится диагональю AC в отношении 3:2, считая от вершины D. На ребрах SD и SA взяты точки P и M соответственно, причем SP:PD=2:5, SM=MA.

а) Построить сечение пирамиды плоскостью MBP.

б) Найти, в каком отношении секущая плоскость делит ребро SC.

в) Найти площадь сечения, если площадь треугольника PQR равна 100 см^2 (R и Q – точки пересечения секущей плоскости с прямыми DA и DC соответственно).

2. Дана пирамида SABCD, основание которой – параллелограмм ABCD, M и P – середины ребер SA и SD.

а) Построить сечение пирамиды плоскостью AMP.

б) Определить, в каком отношении плоскость AMP делит ребро SC.

3. Через вершину правильной треугольной пирамиды и середины сторон AB и CB основания проведено сечение. Длина стороны основания равна *a*, а угол между плоскостью сечения и плоскостью основания равен α.

Найдите:

а) площадь сечения;

б) угол между плоскостью сечения и плоскостью боковой грани SCA.

ТЕМА 2. **Построение сечения, проходящего, через заданную прямую и не лежащую на ней точку**

Уровень А

1. Проведите сечение куба $ABCD\ A_1B_1C_1D_1$ через вершину D_1 и диагональ AC нижнего основания.

Найдите периметр этого сечения, если ребро куба равно a.

2. Через диагональ AC и вершину D_1 правильной четырехугольной призмы $ABCD\ A_1B_1C_1D_1$ проведено сечение. Ребро основания призмы равно 20 см, угол при вершине сечения равен 60 °.

Вычислите площадь сечения.

3. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 8 см, боковое ребро- 6 см.

Вычислите площадь сечения призмы, проведенного через сторону нижнего основания и противолежащую вершину верхнего основания.

4. Через вершину и диагональ основания правильной четырехугольной пирамиды проведено сечение.

Вычислите его площадь, если сторона основания 8 см, а боковое ребро пирамиды равно $5\sqrt{2}$ см.

5. Все ребра тетраэдра равны 24 см. Через боковое ребро и середину не пересекающей его стороны основания проведено сечение.

Вычислите периметр этого сечения.

6. Через вершину правильной шестиугольной пирамиды и диаметр окружности, описанной около ее основания, проведено сечение.

Вычислите площадь сечения, если сторона основания пирамиды равна 4 см, а ее высота равна 5см.

Уровень Б

1. Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник, катеты которого равны 6 см и 8 см. Высота призмы равна 5 см. Через больший катет нижнего основания и середину гипотенузы верхнего основания проведена плоскость.

Вычислите площадь сечения призмы этой плоскостью

2. Через сторону нижнего основания правильной треугольной призмы проведена плоскость, пересекающая противоположное боковое ребро. Косинус угла между этой плоскостью и плоскостью основания равен $\frac{2}{5}$.

Вычислите площадь сечения призмы данной плоскостью, если сторона основания равна 6 см.

***ТЕМА 3.* Построение сечения, проходящего через одну из заданных прямых, параллельно другой прямой**

Уровень А

Через вершину D_1 и середину ребра AD куба $ABCD\ A_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость, параллельная прямой AC. Поведите сечение куба этой плоскостью.

Вычислите периметр сечения, если ребро куба равно 16 см.

Уровень Б

1. Проведите сечение куба $ABCD\ A_1B_1C_1D_1$ плоскостью, параллельной прямой A_1C_1 и проходящей через точку Аи середину ребра A_1B_1.

Какой фигурой является это сечение? Вычислите площадь сечения, если ребро куба равно 24 см.

2. Через основание высоты правильной четырехугольной пирамиды MABCD и середину ребра MC проведено сечение плоскостью, параллельной ребру AB.

Вычислите площадь сечения, если сторона основания и высота пирамиды равна 4 см.

3. Все ребра пирамиды MABC равны 24 см. Через середину ребра MC и вершину B проведена плоскость параллельная прямой AC.

Вычислите периметр и площадь полученного сечения.

Уровень В

1. Проведите сечение куба ABCD $A_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершины D_1 и B, параллельно прямой A_1C_1.

Какой фигурой является сечение? Найдите площадь сечения, если ребро куба равно a.

2. Основании пирамиды MABCD – ромб. AC = 24 см, BDB = 21 СМ. Боковое ребро MA перпендикулярно плоскости основания, MA = 48 см. Через вершину A и середину ребра MC проведена плоскость, параллельная прямой BD.

Вычислите площадь полученного сечения.

Задачи повышенной сложности

1. В правильной четырехугольной пирамиде SABCD через середины сторон AB и AD проведена плоскость, параллельная боковому ребру SA. Найдите площадь сечения, если сторона основания a, а боковое ребро $в$.

Ответ. $5ав\sqrt{2}/16$

2. На ребрах AA_1 и CC_1 параллелепипеда ABCD $A_1B_1C_1D_1$ расположены точки M и N так, что $AM:AA_1= m$, $CN:CC_1=n$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки M и N параллельно диагонали BD основания. Определите, в каком отношении эта плоскость делит ребро BB_1, считая от B.

Ответ. $m+n/2-m-n$.

3. Точка M лежит на ребре BC = a куба ABCD $A_1B_1C_1D_1$ ($A_1B_1C_1D_1$ – нижнее основание).

а) Постройте сечение этого куба плоскостью, проходящей через точку M параллельно плоскости A_1BD.

б) Найдите площадь сечения, если BM = $\frac{a}{4}$. Указания. Разбейте полученное

сечение на две равнобедренные трапеции и вычислите площадь каждой).

Ответ. $S_{сеч} = 11a^2\sqrt{3}/16$.

ТЕМА 4. **Построение сечения, проходящего через заданную точку параллельно заданной плоскости**

Уровень А

Через середину стороны AB основания тетраэдра DABC проведено сечение плоскостью, параллельной боковой грани DBC.

Вычислите периметр и площадь сечения, если все ребра тетраэдра равны 6 см.

Уровень Б

1. Основанием прямой призмы является ромб, сторона которого равна a, а угол - 60°. Высота призмы равна h. Проведите сечение призмы плоскостью, которая содержит середину одной из сторон основания, параллельна боковому ребру и плоскости меньшего диагонального сечения.

Найдите периметр и площадь сечения призмы.

2. Через середину высоты треугольной пирамиды проведено сечение плоскостью, параллельной плоскости основания.

Вычислите площадь сечения, если стороны основания равны 5 дм, 12 дм, 13 дм.

3. Через середину ребра МС правильной пирамиды МАВС проведено сечение плоскостью, параллельно грани МАВ.

Вычислите его площадь, если сторона основания пирамиды равна 16 см, а боковое ребро - 17 см.

4. Через середину ребра AD правильной пирамиды MABCD проведено сечение плоскостью, параллельной грани DMC.

Вычислите площадь сечения, если апофема пирамиды равна $6\sqrt{2}$ дм и наклонена к плоскости основания под углом 45°.

Уровень В

1. Через середины ребер АВ и ВС правильной четырехугольной пирамиды МABCD проведена плоскость, параллельная ребру МВ.

Вычислите площадь сечения, если сторона основания равна 8 см, а высота пирамиды – 7 см.

2. Все ребра тетраэдра равны а. Через точку пересечения медиан одной его грани проведена плоскость, параллельная другой грани.

Найдите площадь полученного сечения.

Задачи повышенной сложности

В кубе ABCD $A_1B_1C_1D_1$ через точку М, принадлежащую ребру BB_1 такую, что $MB : MB_1 = 1:3$, проведите сечение, параллельное плоскости $A_1 BC_1$. Найдите периметр и площадь сечения, если ребро куба равно *a.*

Ответ. $P=9a\sqrt{2}/4$; $S=9a^2\sqrt{3}/32$.

***ТЕМА 5.* Построение сечения, проходящего через заданную точку параллельно каждой из двух заданных прямых**

Уровень Б

Все ребра треугольной пирамиды МАВС равны 12 см. Через основание ее высоты проведено сечение плоскостью, параллельной ребрам АВ и МС.

Найдите площадь сечения.

Уровень В

1. Через середину бокового ребра правильной треугольной пирамиды проведено сечение, плоскость которого параллельна двум скрещивающимся ее ребрам.

Найдите его площадь, если сторона основания *а*, боковое ребро – *в*.

2. Через центр основания правильной треугольной пирамиды проведено сечение плоскостью, параллельной двум ее непересекающимся ребрам.

Вычислите площадь сечения, если сторона основания пирамиды равна 3 см, а боковое ребро – 6 см.

Задачи повышенной сложности

1. Дан куб ABCD $A_1B_1C_1D_1$ с ребром *a*; О – точка пересечения диагоналей АС и BD грани ABCD.

а) Постройте сечение куба плоскостью α: $O\in\alpha$, $B_1D \parallel \alpha$, $A_1C_1 \parallel \alpha$.

б) Найдите площадь сечения.

Ответ. Сечение – равнобедренный треугольник,
$S= a^2\sqrt{6}/4$.

2. Дан куб ABCD $A_1B_1C_1D_1$ с ребром *a*; О – точка пересечения диагоналей AB_1 и BA_1 грани AA_1B_1B.

Найдите длину стороны сечения, проходящей через точку О, и площадь этого сечения, если α: $O\in\alpha$, $B_1D \parallel \alpha$, $A_1C_1 \parallel \alpha$. Указания. Разбейте полученное сечение на равнобедренный треугольник и равнобедренную трапецию и вычислите площадь каждой фигуры.

Ответ. PF= $a\sqrt{5}/2$; $S_{сеч}= 7a^2\sqrt{6}/16$.

3. Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ – равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AC, равной 2 см. Высота призмы равна 4 см, точки К и М – середины ребер BB_1 и ВС соответственно.

Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точку B_1 параллельно прямым АК и АМ, и найти его площадь.

Ответ. $\sqrt{11}$ см^2

4. В параллелепипеде ABCD $A_1B_1C_1D_1$ точки О и O_1 соответственно – точки пересечения диагоналей граней оснований соответственно, точка М принадлежит отрезку А, причем AM: MC = 3.

а) Постройте сечение параллелепипед а плоскостью, проходящей через точку М параллельно прямым А O_1 и DO.

б) Найдите, в каком отношении секущая плоскость делит отрезок A_1C.

Ответ. б) 1:1; в) 5:1, считая от вершины A_1.

ТЕМА 5. Построение сечения, содержащего условия перпендикулярности

Уровень Б

1. Через боковое ребро правильной треугольной призмы проведено сечение, плоскость которого перпендикулярна плоскости противолежащей боковой грани.

Найдите его площадь, если боковое ребро призмы равно *в*, сторона основания –*а*.

2. Через диагональ основания правильной четырехугольной пирамиды проведено сечение плоскостью, перпендикулярной боковому ребру.

Вычислите площадь сечения, если сторона основания пирамиды равна 2 м, угол между плоскостями соседних боковых граней - 120 °.

Уровень В

1. Проведите сечение куба ABCD $A_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершины А и С, перпендикулярной диагонали D_1B.

Найдите площадь сечения, если ребро куба равно *а*.

2. Через сторону основания правильной четырехугольной пирамиды проведена плоскость, перпендикулярная противолежащей боковой грани.

Сравните площади основания пирамиды и полученного сечения.

3. Через основание высоты правильной четырехугольной пирамиды проведена плоскость, перпендикулярная боковому ребру.

Найдите площадь сечения, если сторона основания пирамиды равна ее высоте и равна *а*.

4. Через ребро основания правильной треугольной пирамиды проведена плоскость, перпендикулярная боковому ребру.

Вычислите площадь сечения, если ребро основания равно 4 см.

Задачи повышенной сложности

5. Дан куб ABCD $A_1B_1C_1D_1$. Через точку Р, лежащую на диагонали AC_1 и такую, что $AP=2PC_1$, проведена плоскость, перпендикулярная этой диагонали.

а) Постройте сечение.

б) Найдите его площадь, если ребро куба равно *а*.

Ответ. $\sqrt{3}a^2/2$

6. В правильной треугольной пирамиде SABC сторона основания равна 2, а боковое ребро SA = 6. Через среднюю линию KL боковой грани ABS (KL || AB) проведено сечение, перпендикулярное боковому ребру SC. Найдите: а) площадь сечения; б) угол между плоскостью сечения и плоскостью основания.

Ответ. $S_{сеч} = \sqrt{26}/12$; $\cos\varphi = \sqrt{702}/27$.

7. Построить сечение куба ABCD $A_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точку M – середину ребра AA_1, перпендикулярно диагонали B_1D и найдите площадь этого сечения, если ребро куба равно a.

Ответ. $3\sqrt{3}\,a^2/4$.

8. Основание пирамиды KABCD - квадрат со стороной, равной 4 см. Ребро KA перпендикулярно плоскости ABC; KB =5 см, AH – высота треугольника ABK.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину AK перпендикулярно AH.

б) Найдите площадь сечения.

в) Определите величину угла между секущей плоскостью и плоскостью основания пирамиды.

Ответ. $S_{сеч} = 15/2$ см^2; $\varphi = \arccos 0{,}2$.